

Aprendiendo a multiplicar: el método M&R

Javier García Orza

Laboratorio de Cognición Numérica. Universidad de Málaga

Objetivo general: aprendizaje de las multiplicaciones

Objetivos específicos (y etapas):

1. Comprensión del concepto de multiplicación.
2. Comprensión/Aprendizaje de las reglas del 0 y el 1
3. Comprensión de la propiedad conmutativa
4. Comprensión/Aprendizaje de las reglas del 10
5. Enseñanza de las tablas de multiplicar (una dirección)
6. En caso de presentarse problemas en la memorización, enseñar las reglas del 9 y del 5, y emplear estrategias de cálculo procedimentales.

Nota: los programas de intervención deben ser personalizados. El programa aquí descrito ha mostrado su eficacia en niños con dificultades en el aprendizaje de las multiplicaciones, que tienen niveles intelectuales (CI) superiores a 90. Los ejercicios que se ofrecen en cada fase son ejemplos, el profesional debe, apoyándose en el libro de texto o en materiales elaborados con la misma filosofía, ampliar los mismos en caso de ser necesario.

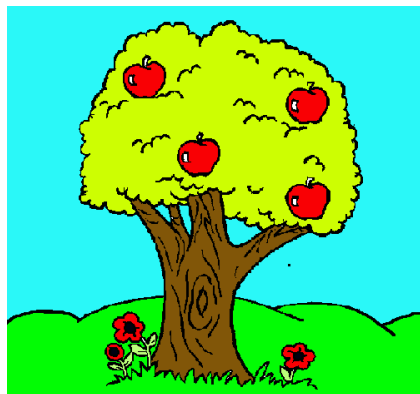
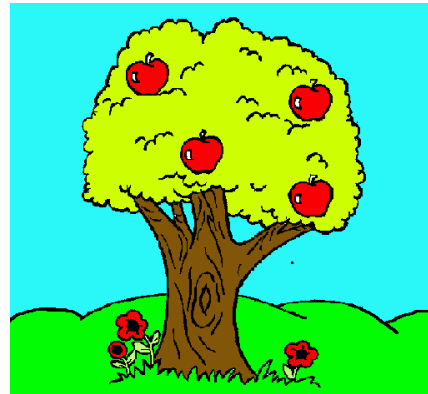
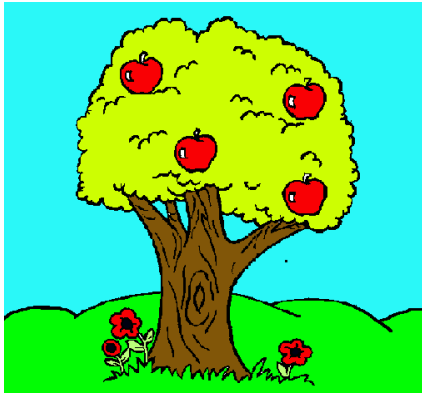
FASE 1: EXPLICACIÓN DEL CONCEPTO DE MULTIPLICACIÓN

En un nivel básico, la multiplicación es la abreviatura de una suma repetida. Por ejemplo, la expresión 5×4 es lo mismo que $4 + 4 + 4 + 4 + 4$. De una manera más sencilla se puede asumir que se trata de 5 grupos con 4 elementos de cada grupo.

Tras la explicación inicial, argumente a los alumnos que es más fácil encontrar el resultado de multiplicar 6×8 mentalmente (cuando se ha aprendido de memoria) que sumar $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8$.

Tras esto, pida a los estudiantes que expliquen cómo calcularían el precio de tres entradas de cine (8 euros), o el número de días de clases en tres semanas de escuela. De esta manera vamos a guiar a los estudiantes a ver que la multiplicación es una forma eficaz de expresar estas cantidades.

Para reforzar lo explicado, se puede ejemplificar con dibujos:



En esta ocasión se le preguntaría:

- a) ¿cuántas manzanas hay en cada árbol?
- b) ¿cuántos árboles hay?

Tras ello se tendría que preguntar:

- c) ¿Cómo calcularían/representarían de manera sencilla cuántas manzanas hay en total?

Se espera que respondan y se enfatizaría que hay dos formas:

- 1) Una forma es $4 + 4 + 4$
- 2) Pero ahora que sabemos la multiplicación podríamos ponerlo como: 4×3

Tras esta explicación se presentaría la tabla de multiplicar entera (ver abajo), explicando lo que hay en ella. Se recuerda las ventajas de saberla de memoria (rapidez) y que el próximo día aprenderemos algunos trucos para no tener que aprender tanta información.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1x1=1	2x1=2	3x1=3	4x1=4	5x1=5	6x1=6	7x1=7	8x1=8	9x1=9	10x1=10
2	1x2=2	2x2=4	3x2=6	4x2=8	5x2=10	6x2=12	7x2=14	8x2=16	9x2=18	10x2=20
3	1x3=3	2x3=6	3x3=9	4x3=12	5x3=15	6x3=18	7x3=21	8x3=24	9x3=27	10x3=30
4	1x4=4	2x4=8	3x4=12	4x4=16	5x4=20	6x4=24	7x4=28	8x4=32	9x4=36	10x4=40
5	1x5=5	2x5=10	3x5=15	4x5=20	5x5=25	6x5=30	7x5=35	8x5=40	9x5=45	10x5=50
6	1x6=6	2x6=12	3x6=18	4x6=24	5x6=30	6x6=36	7x6=42	8x6=48	9x6=54	10x6=60
7	1x7=7	2x7=14	3x7=21	4x7=28	5x7=35	6x7=42	7x7=49	8x7=56	9x7=63	10x7=70
8	1x8=8	2x8=16	3x8=24	4x8=32	5x8=40	6x8=48	7x8=56	8x8=64	9x8=72	10x8=80
9	1x9=9	2x9=18	3x9=27	4x9=36	5x9=45	6x9=54	7x9=63	8x9=72	9x9=81	10x9=90
10	1x10=10	2x10=20	3x10=30	4x10=40	5x10=50	6x10=60	7x10=70	8x10=80	9x10=90	10x10=100

Al finalizar la explicación del concepto de multiplicación junto a los ejercicios del libro se pueden practicar los siguientes:

Representa en forma de multiplicación y resuelve:

- 1) Luis tiene tres monedas de dos euros.

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} =$$

- 2) Ayer me comí 3 caramelos. Hoy quiero regalarles 8 caramelos a mis dos amigos ¿Cuántos tengo que comprar?

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} =$$

- 3) Tengo 2 estuches con 7 lápices en cada uno ¿Cuántos lápices tengo en total?

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} =$$

- 4) Tres amigas han comprado 5 boletos de lotería de navidad ¿Cuántos boletos tienen entre las tres?

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} =$$

- 5) Un sello cuesta 10 céntimos. ¿Cuánto costaría comprar 4 sellos?

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} =$$

Completa:

- 1) $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = \underline{\quad} \times 5$
- 2) $3 \times \underline{\quad} = 9 + 9 + 9$
- 3) $\underline{\quad} \times 3 = 3 + 3 + 3$
- 4) $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = \underline{\quad} \times 7$
- 5) $6 \times \underline{\quad} = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8$
- 6) $\underline{\quad} \times \underline{\quad} = 2 + 2 + 2$
- 7) $5 \times 4 = \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad}$
- 8) $\underline{\quad} \times 8 = 8 + 8$
- 9) $9 \times \underline{\quad} = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$
- 10) $\underline{\quad} \times \underline{\quad} = 5 + 5$

FASE 2: EXPLICACIÓN DE LA PROPIEDAD DEL CERO Y EL UNO

Repasando el concepto de multiplicación, explicar a los alumnos que cero veces algo es cero y una vez algo es algo, utilizando ejemplos del tipo “si tengo 0 manzanas, ¿Cuántas manzanas tendré si lo multiplico por 5? No tendría ninguna manzana porque 5 veces 0 manzanas, es 0”. (Por eso la tabla del cero ni siquiera aparece en nuestra tabla de multiplicaciones)

De forma similar: una cosa una vez, es una cosa, así que la tabla del 1, en la que aparecen cosas 1 vez, es fácil, el resultado es lo que haya una vez.

Ejercicios de la propiedad del cero y el uno.

Completa:

1) $9 \times _ = 0$

2) $6 \times 1 = _$

3) $4 \times 0 = _$

4) $1 \times _ = 0$

5) $9 \times _ = 9$

Indica si es verdadero o falso:

1) $2 \times 0 = 2$

2) $0 \times 3 = 0$

3) $5 \times 1 = 1$

4) $7 \times 1 = 7$

5) $1 \times 0 = 10$

Las reglas del 0 y el 1 tienen una consecuencia sobre nuestra tabla:

1º Que la tabla del cero ni se escribe en las tablas.

2º Gracias a la regla del 1, tal y como se representa en la tabla de multiplicar de más abajo, nos podremos “librar” de estudiar esa tabla. Indicar todas las operaciones de la tabla del 1 que no es necesario aprender. La recitamos una vez y recordamos la regla.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1x1=1	2x1=2	3x1=3	4x1=4	5x1=5	6x1=6	7x1=7	8x1=8	9x1=9	10x1=10
2	1x2=2	2x2=4	3x2=6	4x2=8	5x2=10	6x2=12	7x2=14	8x2=16	9x2=18	10x2=20
3	1x3=3	2x3=6	3x3=9	4x3=12	5x3=15	6x3=18	7x3=21	8x3=24	9x3=27	10x3=30
4	1x4=4	2x4=8	3x4=12	4x4=16	5x4=20	6x4=24	7x4=28	8x4=32	9x4=36	10x4=40
5	1x5=5	2x5=10	3x5=15	4x5=20	5x5=25	6x5=30	7x5=35	8x5=40	9x5=45	10x5=50
6	1x6=6	2x6=12	3x6=18	4x6=24	5x6=30	6x6=36	7x6=42	8x6=48	9x6=54	10x6=60
7	1x7=7	2x7=14	3x7=21	4x7=28	5x7=35	6x7=42	7x7=49	8x7=56	9x7=63	10x7=70
8	1x8=8	2x8=16	3x8=24	4x8=32	5x8=40	6x8=48	7x8=56	8x8=64	9x8=72	10x8=80
9	1x9=9	2x9=18	3x9=27	4x9=36	5x9=45	6x9=54	7x9=63	8x9=72	9x9=81	10x9=90
10	1x10=10	2x10=20	3x10=30	4x10=40	5x10=50	6x10=60	7x10=70	8x10=80	9x10=90	10x10=100

FASE 3: EXPLICACIÓN DE LA PROPIEDAD CONMUTATIVA

La propiedad conmutativa es conocida como "propiedad de orden", ya que el orden de los números que hay en una operación no afecta al resultado. La suma y la multiplicación poseen esta propiedad.

Explicar que la palabra “conmutar” significa cambiar de posición y después elija dos voluntarios para salir a hacer un ejercicio (por ejemplo Ana y Luis) y que se pongan uno detrás del otro. Tras esto, pedir a los alumnos que cambien sus posiciones moviéndose uno adelante y el otro hacia atrás, cambiando de lugar. Una vez realizado, preguntar “¿Todavía están Ana y Luis?.. Sí. Sus posiciones o el orden cambiado, pero siguen siendo las mismas dos personas”.

La propiedad conmutativa de la suma trabaja en la misma manera. Si sumas $5 + 8$ sale 13, puede cambiar el orden de los números y ser $8 + 5$ pero el resultado seguirá siendo 13. Aunque el orden es importante en algunas ocasiones (si te pones la ropa interior encima de la ropa), a veces el orden no es importante”:

$$8 + 5 = 5 + 8$$

$$a + b = b + a$$

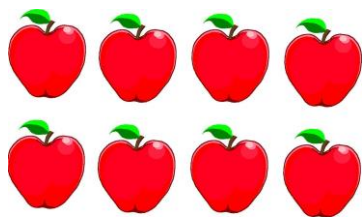
$$\text{Ana} + \text{Luis} = \text{Luis} + \text{Ana}$$

Enseñar a los alumnos a identificar la propiedad conmutativa de la multiplicación debería ser más fácil que antes, desde que saben lo que significa. Volver a explicar que la propiedad conmutativa quiere decir que el orden de los factores no altera el producto.

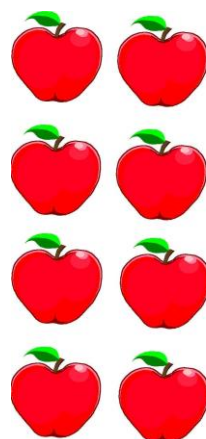
$$a \times b = b \times a$$

$$5 \times 8 = 8 \times 5$$

Como en el caso anterior, se puede ilustrar la propiedad mediante dibujos, para facilitar su aprendizaje:



$$2 \times 4$$



$$4 \times 2$$

Se preguntaría a los alumnos cuantas manzanas hay en la primera imagen y cuantas hay en la segunda. Recaltar que en el primer caso son 2×4 y en el segundo 4×2 y que el resultado sigue siendo el mismo.

Ejercicios de la propiedad conmutativa

1. Indica si es verdadero o falso, poniendo al lado de cada operación V o F:

1) $2 \times 3 = 3 \times 2$

2) $3 \times 5 = 5 \times 5$

3) $6 \times 3 = 3 \times 6$

4) $2 \times 5 = 2 \times 2$

5) $4 \times 6 = 6 \times 6$

6) $5 \times 5 = 5 \times 5$

7) $9 \times 3 = 3 \times 9$

8) $3 \times 2 = 2 \times 4$

2. Completa:

1) $2 \times 3 = 3 \times \underline{\quad}$

2) $3 \times \underline{\quad} = 4 \times 3$

3) $\underline{\quad} \times 6 = 6 \times 9$

4) $7 \times 2 = 2 \times \underline{\quad}$

5) $5 \times 3 = \underline{\quad} \times 5$

La propiedad conmutativa tiene una consecuencia sobre nuestra tabla:

Ahora como se representa en la tabla de multiplicar de más abajo, mostrar que gracias a la propiedad conmutativa nos podremos “librar” de estudiar toda la tabla entera. Indicar todas las operaciones de las que nos vamos a librar (en amarillo) señalando dónde se encuentran sus equivalentes a estudiar. Señalar que gracias a la propiedad conmutativa cuando haya que empezar a memorizar las tablas empezaremos con $a \times a$ (es decir, 2×2 ; $3 \times 3 \dots$).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$1 \times 1 = 1$	$2 \times 1 = 2$	$3 \times 1 = 3$	$4 \times 1 = 4$	$5 \times 1 = 5$	$6 \times 1 = 6$	$7 \times 1 = 7$	$8 \times 1 = 8$	$9 \times 1 = 9$	$10 \times 1 = 10$
2	$1 \times 2 = 2$	$2 \times 2 = 4$	$3 \times 2 = 6$	$4 \times 2 = 8$	$5 \times 2 = 10$	$6 \times 2 = 12$	$7 \times 2 = 14$	$8 \times 2 = 16$	$9 \times 2 = 18$	$10 \times 2 = 20$
3	$1 \times 3 = 3$	$2 \times 3 = 6$	$3 \times 3 = 9$	$4 \times 3 = 12$	$5 \times 3 = 15$	$6 \times 3 = 18$	$7 \times 3 = 21$	$8 \times 3 = 24$	$9 \times 3 = 27$	$10 \times 3 = 30$
4	$1 \times 4 = 4$	$2 \times 4 = 8$	$3 \times 4 = 12$	$4 \times 4 = 16$	$5 \times 4 = 20$	$6 \times 4 = 24$	$7 \times 4 = 28$	$8 \times 4 = 32$	$9 \times 4 = 36$	$10 \times 4 = 40$
5	$1 \times 5 = 5$	$2 \times 5 = 10$	$3 \times 5 = 15$	$4 \times 5 = 20$	$5 \times 5 = 25$	$6 \times 5 = 30$	$7 \times 5 = 35$	$8 \times 5 = 40$	$9 \times 5 = 45$	$10 \times 5 = 50$
6	$1 \times 6 = 6$	$2 \times 6 = 12$	$3 \times 6 = 18$	$4 \times 6 = 24$	$5 \times 6 = 30$	$6 \times 6 = 36$	$7 \times 6 = 42$	$8 \times 6 = 48$	$9 \times 6 = 54$	$10 \times 6 = 60$
7	$1 \times 7 = 7$	$2 \times 7 = 14$	$3 \times 7 = 21$	$4 \times 7 = 28$	$5 \times 7 = 35$	$6 \times 7 = 42$	$7 \times 7 = 49$	$8 \times 7 = 56$	$9 \times 7 = 63$	$10 \times 7 = 70$
8	$1 \times 8 = 8$	$2 \times 8 = 16$	$3 \times 8 = 24$	$4 \times 8 = 32$	$5 \times 8 = 40$	$6 \times 8 = 48$	$7 \times 8 = 56$	$8 \times 8 = 64$	$9 \times 8 = 72$	$10 \times 8 = 80$
9	$1 \times 9 = 9$	$2 \times 9 = 18$	$3 \times 9 = 27$	$4 \times 9 = 36$	$5 \times 9 = 45$	$6 \times 9 = 54$	$7 \times 9 = 63$	$8 \times 9 = 72$	$9 \times 9 = 81$	$10 \times 9 = 90$
10	$1 \times 10 = 10$	$2 \times 10 = 20$	$3 \times 10 = 30$	$4 \times 10 = 40$	$5 \times 10 = 50$	$6 \times 10 = 60$	$7 \times 10 = 70$	$8 \times 10 = 80$	$9 \times 10 = 90$	$10 \times 10 = 100$

FASE 4: LA TABLA DEL 10

Repasando el concepto de multiplicación, explicar a los alumnos lo sencilla que es la tabla del 10, basta con añadir un “0” al número de veces que se multiplica el 10. Para la explicación de la tabla del 10 puede ser más cómodo darle la vuelta a la tabla (usando la propiedad conmutativa ya aprendida). De forma que 10 cosas dos veces son 20. Recitarla la tabla del 10 una vez y recordar su explicación.

Ejercicios

1) $10 \times 0 = \underline{\quad}$

2) $10 \times \underline{\quad} = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$

3) $10 \times \underline{\quad} = 10$

4) $10 \times 2 = \underline{\quad} \times 10$

5) $10 \times 7 = 7 \times \underline{\quad}$

6) $\underline{\quad} \times 1 = 10$

7) $10 \times 8 = \underline{\quad}$

8) $\underline{\quad} \times 6 = 60$

9) $10 \times \underline{\quad} = 0$

10) $10 \times 5 = \underline{\quad}$

La regla del 10 tiene una consecuencia sobre nuestra tabla:

Ahora como se representa en la tabla de multiplicar de más abajo, gracias a la regla del 10 nos podremos “librar” de estudiar esa tabla en concreto (en amarillo). Pues cualquier cosa multiplicada por diez da ese número con un cero añadido. Así que podemos eliminar toda la fila de abajo.

De esta forma y gracias a las sucesivas reglas y propiedades aprendidas, se le indicará al alumno que los números que quedan sin sombrear serán los que tendremos que aprender de memoria en las siguientes clases. Y para ello van a disponer de una tabla que deben ir utilizando para estudiar.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1x1=1	2x1=2	3x1=3	4x1=4	5x1=5	6x1=6	7x1=7	8x1=8	9x1=9	10x1=10
2	1x2=2	2x2=4	3x2=6	4x2=8	5x2=10	6x2=12	7x2=14	8x2=16	9x2=18	10x2=20
3	1x3=3	2x3=6	3x3=9	4x3=12	5x3=15	6x3=18	7x3=21	8x3=24	9x3=27	10x3=30
4	1x4=4	2x4=8	3x4=12	4x4=16	5x4=20	6x4=24	7x4=28	8x4=32	9x4=36	10x4=40
5	1x5=5	2x5=10	3x5=15	4x5=20	5x5=25	6x5=30	7x5=35	8x5=40	9x5=45	10x5=50
6	1x6=6	2x6=12	3x6=18	4x6=24	5x6=30	6x6=36	7x6=42	8x6=48	9x6=54	10x6=60
7	1x7=7	2x7=14	3x7=21	4x7=28	5x7=35	6x7=42	7x7=49	8x7=56	9x7=63	10x7=70
8	1x8=8	2x8=16	3x8=24	4x8=32	5x8=40	6x8=48	7x8=56	8x8=64	9x8=72	10x8=80
9	1x9=9	2x9=18	3x9=27	4x9=36	5x9=45	6x9=54	7x9=63	8x9=72	9x9=81	10x9=90
10	1x10=10	2x10=20	3x10=30	4x10=40	5x10=50	6x10=60	7x10=70	8x10=80	9x10=90	10x10=100

FASE 5: LA MEMORIZACIÓN DE LA TABLA DE MULTIPLICAR

Siguiendo el procedimiento habitual de memorización pero solo de los operandos incluidos en color en la tabla, se procederá al aprendizaje de las tablas de multiplicar en orden ascendente, tabla del 2, tabla del 3...hasta la del 9. Con frecuencia debe recordarse jugar con los inversos para que no se olviden, aunque en un principio se primará la presentación en el orden especificado en las tablas que es siempre menor x MAYOR.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1x1=1	2x1=2	3x1=3	4x1=4	5x1=5	6x1=6	7x1=7	8x1=8	9x1=9	10x1=10
2	1x2=2	2x2=4	3x2=6	4x2=8	5x2=10	6x2=12	7x2=14	8x2=16	9x2=18	10x2=20
3	1x3=3	2x3=6	3x3=9	4x3=12	5x3=15	6x3=18	7x3=21	8x3=24	9x3=27	10x3=30
4	1x4=4	2x4=8	3x4=12	4x4=16	5x4=20	6x4=24	7x4=28	8x4=32	9x4=36	10x4=40
5	1x5=5	2x5=10	3x5=15	4x5=20	5x5=25	6x5=30	7x5=35	8x5=40	9x5=45	10x5=50
6	1x6=6	2x6=12	3x6=18	4x6=24	5x6=30	6x6=36	7x6=42	8x6=48	9x6=54	10x6=60
7	1x7=7	2x7=14	3x7=21	4x7=28	5x7=35	6x7=42	7x7=49	8x7=56	9x7=63	10x7=70
8	1x8=8	2x8=16	3x8=24	4x8=32	5x8=40	6x8=48	7x8=56	8x8=64	9x8=72	10x8=80
9	1x9=9	2x9=18	3x9=27	4x9=36	5x9=45	6x9=54	7x9=63	8x9=72	9x9=81	10x9=90
10	1x10=10	2x10=20	3x10=30	4x10=40	5x10=50	6x10=60	7x10=70	8x10=80	9x10=90	10x10=100

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1x1=1	2x1=2	3x1=3	4x1=4	5x1=5	6x1=6	7x1=7	8x1=8	9x1=9	10x1=10
2	1x2=2	2x2=4	3x2=6	4x2=8	5x2=10	6x2=12	7x2=14	8x2=16	9x2=18	10x2=20
3	1x3=3	2x3=6	3x3=9	4x3=12	5x3=15	6x3=18	7x3=21	8x3=24	9x3=27	10x3=30
4	1x4=4	2x4=8	3x4=12	4x4=16	5x4=20	6x4=24	7x4=28	8x4=32	9x4=36	10x4=40
5	1x5=5	2x5=10	3x5=15	4x5=20	5x5=25	6x5=30	7x5=35	8x5=40	9x5=45	10x5=50
6	1x6=6	2x6=12	3x6=18	4x6=24	5x6=30	6x6=36	7x6=42	8x6=48	9x6=54	10x6=60
7	1x7=7	2x7=14	3x7=21	4x7=28	5x7=35	6x7=42	7x7=49	8x7=56	9x7=63	10x7=70
8	1x8=8	2x8=16	3x8=24	4x8=32	5x8=40	6x8=48	7x8=56	8x8=64	9x8=72	10x8=80
9	1x9=9	2x9=18	3x9=27	4x9=36	5x9=45	6x9=54	7x9=63	8x9=72	9x9=81	10x9=90
10	1x10=10	2x10=20	3x10=30	4x10=40	5x10=50	6x10=60	7x10=70	8x10=80	9x10=90	10x10=100

En color las operaciones que es necesario aprender por memorización. Mira detrás para más información.

En esta tabla figuran las multiplicaciones que debes aprender de memoria. Gracias a la propiedad conmutativa y a algunos trucos solo estudiaremos las que aparecen en negrita y tamaño más grande. La **propiedad conmutativa o de orden** que dice que 3×2 es lo mismo que 2×3 , así que basta con saber que gracias a esta propiedad al aprender 3×2 ya estamos aprendiendo 2×3 .

Truco: tampoco estudiamos las siguientes tablas, las razonamos, aunque repetirlas alguna vez ayuda.

- Tabla del 0: cualquier número multiplicado por cero es cero, porque cualquier número ninguna vez es nada.
- Tabla del 1: cualquier número multiplicado por 1, es decir, cualquier número una vez, es ese número. 7×1 es el 7 una vez, es decir, 7.
- Tabla del 10: es el 10 varias veces, así 10×2 significa el 10 dos veces que es igual que $10 + 10$, es decir, 20. El resultado de una multiplicación de la tabla del 10 es fácil, basta con añadir al número de veces que se multiplica el 10 un 0. Es decir, en 10×7 , basta con poner detrás del 7 un 0, lo que lo convierte en 70.